Maass wave form の構成とその Petersson 内積

東北大学大学院理学研究科数学専攻
田中大地 (Daichi TANAKA) *

Abstract

Maass は狭義類数 1 の実二次体上の Hecke 指標を用いて Maass 波動尖点形式を構成した [7]. 本講演では, Maass の結果を拡張し, 一般の実二次体上で Maass 波動尖点形式を構成する. さらに, 構成した Maass 波動尖点形式の Petersson 内積の明示公式を与える. Dihedral な Artin 表現に対応する Hecke 指標を考え, それにより構成された Maass 尖点形式 の Petersson 内積を代数体のレギュレータで表す.

1 導入

保型形式論において保型形式の構成問題は, 重要であり広く研究されている [8],[6],[15]. しかし, その多くは正則な保型形式に関するものである. 本講演では Maass 波動形式という非正則な保型形式の構成問題について著者が得た結果を述べる. 非正則な保型形式の明示的構成構成についての結果には [13],[10] がある. 導入として, Maass 波動形式について正則な保型形式であるモジュラー形式と比較して説明する. まず記号を導入する. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1$ を N を法とした Diriclet 指標とする. また, $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| N \mid c \right\}$ と定める. Maass 波動形式とは, 複素上半平面 $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$ 上で定義された次のような性質を持つ関数 Θ のことである:

$$\begin{cases} (1)\Theta \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right. = \chi(d)\Theta, \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N); \\ (2)\Theta \text{ は } \mathbb{H} \text{ 上で実解析的であり} \Delta = -y^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \text{の固有値 } \dfrac{1}{4} - \nu^2 \text{ の固有関数である;} \\ (3)\Theta \text{ は } \Gamma_0(N) \text{ 尖点での増大度は高々多項式オーダーである.} \end{cases}$$

ここで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})^+$ に対して, $\left(\Theta \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right. \right)(z) := \Theta\left(\dfrac{az+b}{bz+d} \right)$ である. また, (3) において尖点 $c \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ における増大度が多項式オーダーとは次の意味である. $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})^+$ を $\gamma(i\infty) = c$ なるようにとるときに, $t \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\left(\Theta \left| \gamma^{-1} \right. \right)(iy) = O(y^t) \qquad y \to \infty$$

* E-mail:tanaka.daichi.t8@dc.tohoku.ac.jp

となることである．(2) はモジュラー形式における正則性 (Cauchy-Riemann 方程式) をラプラシアン Δ に置き換えた条件とである．また, (1) は $\left(\Theta\Big|_k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z) \coloneqq (cz+d)^{-k}\Theta\left(\dfrac{az+b}{bz+d}\right)$ とすることで重さ k のモジュラー形式の定義となるので Maass 波動形式はモジュラー形式の類似とみなせる．(1), (2), (3) から Maass 波動形式 は Fourier 展開することができて, その形は

$$\Theta(z) = ay^{\nu+1/2} + by^{-\nu+1/2} + \sum_{n\neq 0} a(n)\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

となる．ここで $z = x+iy \in \mathbb{H}$, かつ $a, b, a(n) \in \mathbb{C}$ である．正則モジュラー形式には尖点形式というものがあったが Maass 波動形式にも尖点形式を定義することができ, それは (1), (2) に加えて次の $(3)'$ を満たすものとして定める:

$(3)'$ Θ は尖点で急減少する．つまり, 各尖点 $c \in \mathbb{Q}\cup\{i\infty\}$ に対して $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})^+$ を $\gamma(i\infty) = c$ となるよう取るとき, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\left(\Theta\,\middle|\gamma^{-1}\right)(iy) = O(y^t) \quad y \to \infty$ が成り立つ．

(1), (2), $(3)'$ をみたす, つまり Maass 波動尖点形式の全体からなるベクトル空間を $S(\Gamma_0(N), \nu, \chi)$ とかく．
$(3)'$ によって $\Theta \in S(\Gamma_0(N), \nu, \chi)$ は

$$\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a(n)\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)e^{2\pi inx} \tag{1.1}$$

となることが分かる．ここで F を実二次体とし, $J_F^{\mathfrak{f}}$ を整イデアル $\mathfrak{f}$ と素である分数イデアルのなす群とする．つまり, $J_F^{\mathfrak{f}} = \{I : F \text{ の } 0 \text{ でない分数イデアル} \mid (I, \mathfrak{f}) = 1\}$ とする．また, $\psi\colon J_F^{\mathfrak{f}} \to S^1$ を実二次体 F 上の $\mathfrak{f}$ を法とする型が $(\epsilon, \epsilon, \frac{\nu}{i}, -\frac{\nu}{i})$ (ただし $\epsilon \in \{0,1\}, \nu \in i\mathbb{R}$) の Hecke 指標とする．(Hecke 指標については 2 節を参照されたい.) ψ に対して Θ_ψ を次式で定める:

$$\Theta_\psi(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a})\sqrt{y}K_\nu(2\pi\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})y)\cos(2\pi\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})x) & \text{if } \epsilon = 0, \\ \displaystyle\sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a})\sqrt{y}K_\nu(2\pi\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})y)\sin(2\pi\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})x) & \text{if } \epsilon = 1. \end{cases}$$

このとき, 次の結果を得た．

Theorem 1.1. 原始的な Hecke 指標 $\psi \neq 1$ が Dirichlet 指標 χ で $\chi \circ \mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}$ と表せないとき, $\Theta_\psi \in S(\Gamma_0(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})), \nu, \chi_D\psi_{\mathrm{fin}})$ となる．ただし, イデアル I に対して, $\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(I) = \#(\mathcal{O}_F/I)$ である．

[7] では狭義類数 1 かつ $\nu \neq 0$ の場合に Theorem 1.1 を証明したが, それを拡張した結果は著者の知る限り見つからなかったので, 本講演ではこれを一般の場合に拡張できたことを紹介する．

モジュラー尖点形式に対して, Petersson 内積を定義することができたのと同様に Maass 波動尖点形式についても Pertersson 内積を定義することができる．後半では構成した Maass 波動尖点形式の Petersson 内積の明示計算を与える．これは [14] で行われたモジュラー形式尖点形式についての

Petersson 内積の明示計算の一つの類似を与えている。最後に, 得られた結果を用いて Petersson 内積の計算例を与える. [11], [5] により L-関数の代数的独立性が調べられているが, これらの例は, L-関数の特殊値が Petesson 内積を通じて超越的な情報とどうかかわっているかを示している.

2 準備

Hecke 指標および Hecke L-関数についての基本的性質を復習する. 議論の多くは一般の代数体で可能であるがここでは実二次体 F に限って記述する. 1 節で定義した記号はそのまま説明なしに使うので注意されたい. 基本的な文献は [12] である.

Definition 2.1. ψ を準同型 $J_F^{\mathfrak{f}} \to S^1$ について, $J_F^{\mathfrak{f}}$ と素である任意の $a \in \mathcal{O}_F$ に対して

$$\psi\left((a)\right) = \psi_{\mathrm{fin}}(a)\psi_{\infty}(a)$$

となる準同型 $\psi_{\mathrm{fin}} : (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^{\times} \to S^1$ と連続準同型 $\psi_{\infty} : \mathbb{R}^{\times} \times \mathbb{R}^{\times} \to S^1$ が存在するとき ψ を $\mathfrak{f}$ を法としたの Hecke 指標という. ここで, 任意 $a \in F$ の二つの実埋め込みを $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ と書くとき $\psi_{\infty}(a) = \psi_{\infty}(a^{(1)}, a^{(2)})$ であることに注意せよ.

Remark 2.2.

1. ψ を $\mathfrak{f}$ を法としたの Hecke 指標とするとき, ψ_{fin} や ψ_{∞} は一意的であり, ψ_{∞} は $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$, $\nu_1, \nu_2 \in i\mathbb{R}$ を用いて $\psi_{\infty}(x) = \mathrm{sgn}(\frac{x_1}{|x_1|})^{\epsilon_1}\mathrm{sgn}(\frac{x_2}{|x_2|})^{\epsilon_2}|x_1|^{\nu_1}|x_2|^{\nu_2}$ と書ける. この $(\epsilon_1, \epsilon_2, \frac{\nu_1}{i}, \frac{\nu_2}{i})$ を ψ の型という.
2. ψ を $\mathfrak{f}$ を法とする Hecke 指標とする. $\mathfrak{f}' \mid \mathfrak{f}$ かつ $\mathfrak{f}' \neq \mathfrak{f}$ となる整イデアル $\mathfrak{f}'$ と $\mathfrak{f}'$ を法とする Hecke 指標 ψ' が存在して ψ が ψ' の $J_F^{\mathfrak{f}}$ への制限となるとき ψ は原始的でないという. そうでないとき ψ は原始的であるという.

Definition 2.3. (ガウス和) $\psi = \psi_{\mathrm{fin}}\psi_{\infty}$ を $\mathfrak{f}$ を法とした原始的な Hecke 指標とする. また, $\mathfrak{d}$ は $F/\mathbb{Q}$ の共役差積とする. $\mathcal{O}_K$ の整イデアル $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ が単項イデアルかつ $(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}) = 1$ となるようにとる. $\mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{a} = (a) \quad (a \in K)$ としよう. このとき, ψ のガウス和 $\tau_K(\psi)$ を

$$\tau_K(\psi) = \frac{\psi_{\infty}(a)}{\psi(\mathfrak{a})} \sum_{x \in \mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{a}} \psi_{\mathrm{fin}}(x) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(x/a)}.$$

で定める. この定義において $\tau_K(\psi)$ は $\mathfrak{a}$, a の取り方によらない.

Theorem 2.4. 次が成り立つ.

- $|\tau_K(\psi)|^2 = \mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})$
- ψ_1, ψ_2 をそれぞれ $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ を法とした原始的な Hecke 指標とする. また, $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2) = 1$ とする. このとき $\tau_K(\psi_1\psi_2) = \psi_1(\mathfrak{f}_2)\psi_2(\mathfrak{f}_1)\tau_K(\psi_1)\tau_K(\psi_2)$ となる.

次に Hecke L-関数の解析的性質について述べる. 実二次体 F 上の $\mathfrak{f}$ を法とした Hecke 指標 ψ に対

して, Hecke L-関数を

$$L(s,\psi)=\sum_{\mathfrak{a}}\psi(\mathfrak{a})\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$$

で定める.

Theorem 2.5. ([9, p105]) F を実 2 次体とし, D をその判別式とする. ψ を F 上の $\mathfrak{f}$ を法とした原始的な Hecke 指標とし, その型を $(\epsilon_1,\epsilon_2,\frac{\nu}{i},-\frac{\nu}{i})$, $\epsilon_1,\epsilon_2\in\{0,1\},\nu\in i\mathbb{R}$ とする. このとき,

$$\Lambda(s,\psi)=\pi^{-s}\left(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\epsilon_1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\epsilon_2+-\nu}{2}\right)L(s,\psi)$$

は $\mathbb{C}$ 上に有理型関数として延長される. より詳しく ψ が自明指標でないときは $\mathbb{C}$ 全体で正則で, 自明指標のときは $s=1,0$ で一位の極を持ちその他の点で正則となる. また次の関数等式を満たす.

$$\Lambda(1-s,\psi)=T(\psi)\Lambda(s,\bar{\psi})$$

ここで

$$T(\psi)=i^{-\epsilon_1-\epsilon_2}\frac{\tau_F(\psi)}{\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})^{\frac{1}{2}}}$$

さらに, 任意の $\sigma_1<\sigma_2$, $t_0>0$ に対して, $\Lambda(s,\psi)$ は $\sigma_1<\mathrm{Re}(s)<\sigma_2$, $|\mathrm{Im}(s)|>t_0$ 上で有界である.

Remark 2.6. Pharagmén-Lindelöf の定理から, $\Lambda(s,\psi)$ は $|\mathrm{Im}(s)|\to\infty$ のとき, $\forall\sigma_1$, σ_2 に対して, $\sigma_1<\mathrm{Im}(s)<\sigma_2$ で一様に急減少する.

3 Theorem 1.1 の証明

この節を通じて 1 節で定めた表記に従う. ψ を $\mathfrak{f}$ を法としたの Hecke 指標とする. ψ の型は $(\epsilon,\epsilon,\frac{\nu}{i},-\frac{\nu}{i})$ であるとする. ここで $\epsilon\in\{0,1\}$, $\nu\in i\mathbb{R}$ である. 本節の目標は. Theorem 1.1 を示すことである. 証明に際して次の二つの補題を用意する.

Lemma 3.1. ([3, p.106]) $s\in\mathbb{C}$, $\nu\in i\mathbb{R}$ に対して次が成り立つ:

$$\int_0^\infty K_\nu(y)y^s\frac{dy}{y}=2^{s-2}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right).$$

Lemma 3.2. ([3, p109])
$f\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{H})$ を Δ の固有関数とする. f が実解析的で各 $y>0$ にについて $f(iy)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(iy)$ であるならば $f=0$ である.

3.0.1 Theorem 1.1 の証明の概略

手法は, Weil の逆定理の方法で Hecke L-関数の解析的性質に帰着させる. 証明の流れは同様であるが, 偶奇性で微妙に異なる計算になるため $\epsilon=0,1$ で場合分けが必要になる. ここでは, $\epsilon=0$ のみ述

べる. $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき Θ_ψ の Mellin 変換は

$$\int_0^\infty \Theta_\psi(iy)y^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{dy}{y}=\frac{1}{4}(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))^{-s/2}\Lambda(s,\psi)$$

となる. Mellin 逆変換公式より $R>1$ なる任意の実数 R に対して,

$$\Theta_\psi(iy)=\frac{\sqrt{y}}{8\pi i}\int_{R-i\infty}^{R+i\infty}(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))^{-s/2}\Lambda(s,\psi)\,y^{-s}\,ds \tag{3.1}$$

となる. Pharagmén-Lindelöf の定理から, $\Lambda(s,\psi)$ は $|\mathrm{Im}(s)|\to\infty$ のとき, $\forall\sigma_1,\sigma_2$ に対して, $\sigma_1<\mathrm{Im}(s)<\sigma_2$ で一様に急減少する. このことと Cauchy の積分定理から, 式 (3.1) は任意の実数 $R\in\mathbb{R}$ で成り立つ. Theorem 2.5 を適用して

$$\Theta_\psi(iy)=T(\psi)\,\Theta_{\bar{\psi}}\big((D\mathbb{N}(\mathfrak{f}))^{-1}y\big)$$

となるので, Lemma 3.2 より

$$\Theta_\psi=T(\psi)\,\Theta_{\bar{\psi}}\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}) & \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

を得る.

ここで inert prime p で $p\nmid\mathbb{N}(\mathfrak{f})$ なるものを固定する. (指標とは限らない) 写像 $\sigma\colon(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\to S^1$ に対して, $f_{\sigma,\psi}$ を次のように定める：

$$f_{\sigma,\psi}\coloneqq\sum_{\substack{m \bmod p\\(m,p)=1}}\bar{\sigma}(m)\Theta_\psi\Big|\begin{pmatrix}p & m\\ & p\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

また, $\rho:(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\to S^1$ を $\rho(m)\coloneqq\sigma(r)$ $(-rmD\mathbb{N}(\mathfrak{f})\equiv 1 \bmod p)$ によって定義する.
このとき次が成り立つ：

$$f_{\sigma,\psi}\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}=-T(\psi)\psi_{\mathrm{fin}}(p)f_{\rho,\bar{\psi}} \tag{3.4}$$

写像 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\to S^1$ の全体のなす空間は Dirichlet 指標 の線型和で書けるから, σ は Dirichlet 指標と仮定してよい. このとき $\rho(m)=\bar{\sigma}\,(-D\mathbb{N}(\mathfrak{f}))\,\bar{\sigma}(m)$ となるから式 (3.4) は

$$f_{\sigma,\psi}\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}=-T(\psi)\psi_{\mathrm{fin}}(p)\sigma\left(-D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})\right)f_{\bar{\sigma},\bar{\psi}} \tag{3.5}$$

となる. 以下で, 式 (3.5) を示す. 以下の三つの場合に分けて証明する.

- Case 1: σ が原始的で $\sigma(-1)=1$ の場合
- Case 2: σ が原始的で $\sigma(-1)=-1$ の場合
- Case 3: $\sigma=1$ の場合

ここでは, Case 1 のみ示す. Case 2 場合の証明は Case 1 同様であり, Case 3 の場合は Case 1 や Case 2 より優しいので省略する. $f_{\sigma,\psi}(iy)$ の Mellin 変換は

$$\int_0^\infty f_{\sigma,\psi}(iy)\,y^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{dy}{y}=\tfrac{1}{4}\,\tau_{\mathbb{Q}}(\bar{\sigma})\,(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))^{-s/2}\,\Lambda(s,(\sigma\circ\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}})\psi)$$

と計算されるので, Mellin 逆変換公式によって

$$f_{\sigma,\psi}(iy) = \frac{\sqrt{y}}{8\pi i}\,\tau_{\mathbb{Q}}(\bar{\sigma})\int_{R-i\infty}^{R+i\infty}(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}))^{-s/2}\Lambda(s,(\sigma\circ\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}})\psi)\,y^{-s}\,ds, \qquad (R>1).$$

よって Theorem 2.5 および Remark 2.6 により

$$f_{\sigma,\psi}(iy) = -\,\psi_{\mathrm{fin}}(p)\,\sigma(-D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))T(\psi)\,f_{\bar{\sigma},\bar{\psi}}\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}(iy)$$

となり, さらに Lemma 3.2 を適用して

$$f_{\sigma,\psi}(z) = -\,\psi_{\mathrm{fin}}(p)\,\sigma(-D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))\,T(\psi)\,f_{\bar{\sigma},\bar{\psi}}\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}$$

を得る. 式 (3.2), 式 (3.4) を用いて保型性を示す. $m, r\in\mathbb{Z}$ を

$$-D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})mr \equiv 1 \pmod p$$

となるようにとり, $s\in\mathbb{Z}$ を

$$ps - D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})mr = 1$$

となるよう取る. これに対して関数 $\sigma(n)$ を次で定める：

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & (\text{if } n\equiv m \pmod p), \\ 0 & (\text{if } n\not\equiv m \pmod p). \end{cases}$$

つまり, $\sigma(n)$ は $n\equiv m\ (\mathrm{mod}\ p)$ のときのみ 1 をとる写像である. このとき, ρ は

$$\rho(n) = \begin{cases} 1 & (\text{if } n\equiv r \pmod p) \\ 0 & (\text{if } n\not\equiv r \pmod p) \end{cases}$$

である. 式 (3.5) を適用して,

$$\Theta_\psi\Big|\begin{pmatrix} p & m\\ & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix} = -T(\psi)\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_{\bar{\psi}}\Big|\begin{pmatrix} p & r\\ & p\end{pmatrix}$$

よって式 (3.2) 用いると, 保型性が導かれる.

$$\begin{aligned}\Theta_\psi\Big|\begin{pmatrix} p & m\\ & p\end{pmatrix} &= -\,T(\psi)\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_{\bar{\psi}}\Big|\begin{pmatrix} p & r\\ & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}\\ &= -\,\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_\psi\Big|\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r\\ & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1\\ D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(p\mathfrak{f}) & \end{pmatrix}\\ &= -\,\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_\psi\Big|\begin{pmatrix} p & -m\\ -Dr\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}) & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & m\\ & p\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

従って

$$\Theta_\psi = -\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_\phi\Big|\begin{pmatrix} p & -m\\ -Dr\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}) & s\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

となる.

$\chi_D(a)=-1$ となる $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))$ に対して Dirichlet 算術級数定理より

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+uc & b+ud \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad (p \text{ はある素数})$$

となる $u \in \mathbb{Z}$ をとるとき $\chi_D(a)=-1$ ゆえ $\chi_D(p)=-1$ となるから, 式 (3.6) から

$$\begin{aligned}\Theta_\psi =& -\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_\psi \Bigg| \begin{pmatrix} a+uc & b+ud \\ c & d \end{pmatrix} = -\psi_{\mathrm{fin}}(p)\Theta_\psi \Bigg| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ =& \chi_D(a)\psi_{\mathrm{fin}}(a)\Theta_\psi \Bigg| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. $\chi_D(a)=1$ となる $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))$ は $\chi_D(a)=-1$ なる $\Gamma_0(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))$ の元の積でかけるので保型性は成り立つ. 最後に尖点での挙動について概要を述べる. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と l を法とする Dirichlet 指標 σ に対して, l が素数でなくても $f_{\sigma,\psi}$ を式 (3.3) によって定める. 保型性の証明同様に Mellin 変換によって $f_{\sigma,\psi}$ は Hecke L-関数の積分で表示できる. Hecke L-関数の $\mathrm{Im}(s) \to \infty$ での挙動については Theorem 2.5 によってわかるので, 積分表示から $f_{\sigma,\psi}(iy)$ の $y \to +0$ の挙動が分かるので, $m=0,1,\cdots,m-1$ に対して $\Theta_\psi(iy+\frac{m}{l})$ の $y \to +0$ での挙動が分かる.

4 Petersson 内積の計算例

ここでは, Theorem 1.1 で構成した Maass 波動尖点形式の Petersson 内積の明示公式を与え, その具体例を与える. 引き続き, Section 1 の表記を用いる.

Definition 4.1. $\Theta_1, \Theta_2 \in S(\Gamma_0(N), \nu, \chi)$ とする. Θ_1 と Θ_2 の Petersson 内積を次式で定める:

$$\langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} \Theta_1(z)\overline{\Theta_2(z)}\frac{dxdy}{y^2}.$$

Section 3 で構成した Maass 波動尖点形式の Petersson 内積は次で与えられる.

Theorem 4.2.

$$\begin{aligned}\langle \Theta_\psi, \Theta_\psi \rangle =& \frac{1}{4\pi}\phi(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))^{-1}(D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}))^2\Gamma\left(\frac{1+2\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \\ & \times \left(\prod_{\substack{\mathfrak{p}:\ \mathrm{split}, \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f} \\ \mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})|\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})}} (1-\mathbb{N}F/\mathbb{Q}(\mathfrak{p})^{-1})^{-1} \right) \times \left(\prod_{p|D\mathbb{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})} (1-p^{-1})(1-\chi_D(p)p^{-1}) \right) \\ & \times \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_F(s))L(1,\psi(\bar{\psi}\circ\sigma)).\end{aligned}$$

ここで,σ は $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の非自明な元で ϕ は Euler 関数である. また, χ_D は 実二次体 F に関する二次指標である.

ここでは, Theorem 4.2 の証明はしない. 近日, Arxiv に論文を投稿予定なので, そちらを参照されたい.
最後に, $\langle\Theta_\psi,\Theta_\psi\rangle$ の計算例を与える. そのために, 古典的に知られている次の結果を使う.

Theorem 4.3. *K を代数体とする. K に付随する Dedekind ζ-関数 ζ_K の $s=1$ での留数はつぎで与えられる:*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K(s))=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_Kh_k}{w_k\sqrt{D_K}}.$$

ここで, r_1, r_2 は K の実埋め込み, 虚埋め込みの個数であり, w_k は K に含まれる 1 のべき根の個数である. また, R_K, h_k, w_k, D_k はそれぞれ K のレギュレータ, 類数, 判別式である.

類数 3 の例として次のような状況を考える. $F=\mathbb{Q}(\sqrt{229})$, L は F の Hilbert 類体とする. F の類数は $h_F=3$ より, $[L:F]=3$ である. α を X^3-4X-1 の根とし $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ とすると, $L=KF$ である. $L/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であることに注意せよ. $\mathcal{C}_F$ をイデアル類群とする. $\mathrm{Gal}(L/F)$ の非自明な指標 $\psi':\mathrm{Gal}(L/F)\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to S^1$ をとって, Hecke 指標 ψ を次のような合成で定義する:

$$J_F^1\xrightarrow{\text{canonical}}\mathcal{C}_{\mathcal{F}}\xrightarrow[\cong]{\mathrm{rec}_F}\mathrm{Gal}(L/F)$$

このとき, L は総実代数体なので, ψ の型は $(0,0,0,0)$ である. また, $\mathfrak{f}=1$, $D=229$ として Theorem 4.2 を適用して

$$\begin{aligned}L(s,\psi(\bar{\psi}\circ\sigma))=&\prod_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_F}(1-\psi(\mathfrak{p})^2\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}=L(s,L/F,\psi'^2)\\ =&L(s,L/\mathbb{Q},\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}L/\mathbb{Q}}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}\psi'^2)=L(s,L/\mathbb{Q},\rho)\\ =&\frac{L(s,L/\mathbb{Q},\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/k)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}1)}{L(s,L/\mathbb{Q},1)}=\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\end{aligned}$$

ここで ρ は $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong S_3$ の二次の規約指標である. よって $L(1,\psi(\overline{\psi}\circ\sigma))=\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K(s))$ となる. 以上から, R_F,R_K を F,K のレギュレータとすると,

$$\langle\Theta_\psi,\Theta_\psi\rangle=24R_FR_K\approx153.338132534474\cdots$$

を得る. 判別式が 2000 以下で類数 $h_F=3$ なる場合の計算例は表 1 に載せておいた.
次に類数 5 の例を考える. 類数 5 のときは代数体の不変量のみで明示的に書くことはできていないが Artin L で記述できることをみる. $F=\mathbb{Q}(\sqrt{401})$ とし, L を F の Hilbert 類体とする. F の類数は $h_F=5$ なので, $[L:F]=5$ である. β を多項式 $X^5-X^4-5X^3+4X^2+3X-1$ の根とすると, L は $L=F(\beta)$ となる. 非自明な指標 ψ': $\mathrm{Gal}(L/F)\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\to S^1$ をとり, Hecke 指標 ψ を次のような合成で定める:

$$J_F^1\xrightarrow{\text{canonical}}\mathcal{C}_L\xrightarrow[\cong]{\mathrm{rec}_F}\mathrm{Gal}(L/F)\to S^1.$$

このとき, $L(s,\psi(\overline{\psi}\circ\sigma))=L(s,\psi'^2,L/F)$ であるので, Theorem 4.2 を適用して,

$$\langle\Theta_\psi,\Theta_\psi\rangle=\frac{5}{2}\sqrt{401}R_FL(1,\psi'^2,L/F)$$

を得る．ここで R_F は F のレギュレータである．この場合で Petersson 内積をレギュレータで明示的に表示することが困難であるのは二面体群 D_5 には有理表現でないものがあるからである．S_3 のように有理表現のみを持つ群に関しては Stark [14] により中間体の Dedekind ζ-関数の留数の積でかけることが分かっているため, 類数 3 の場合はレギュレータで明示的に表示できたのである．しかしながら, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/F)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}(\psi'^2) \bigoplus \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/F)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}(\psi'^4)$ は有理表現であって, 実際に指標の計算をすることで $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/F)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}(\psi'^2) \bigoplus \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/F)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})}(\psi'^4) \bigoplus 1 \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(L/K)}^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})} 1$ という表現の同型が存在することが分かるので, 次の等式を得る:

$$\langle \Theta_\psi, \Theta_\psi \rangle \left\langle \Theta_{\psi^2}, \Theta_{\psi^2} \right\rangle = 100 R_F^2 R_K \approx 12489.3392834563 \cdots$$

ここで R_K は K のレギュレータである．より大きい素数類数の実二次体でも同様の等式を得ることができる．

以下に判別式が 2000 以下かつ類数 3 の実二次体 F についての上の例と同じように Hecke 指標をとって Θ_ψ を定めるときの, Petersson 内積の計算結果をまとめた. $L = FK$ は F の Hilbert 類体である. また, 表 1 の例はすべて L が総実代数体であり, 従って ψ の型は $(0,0,0,0)$ であることを述べておく. 結果として, $D = 1957$ の例では $\langle \Theta_\psi, \Theta_\psi \rangle = 48 R_F R_K$ であり, それ以外のすべての例で $\langle \Theta_\psi, \Theta_\psi \rangle = 24 R_F R_K$ となった. 計算して気づいたことは K の類数 h_K が $D = 1957$ では $h_K = 2$, その他の例では $h_K = 1$ となることだけであるが, 直接の因果関係については分からない.

F の判別式	K を与える多項式	$\langle \Theta_\psi, \Theta_\psi \rangle$
229	$X^3 - 4X - 1$	$24R_FR_K \approx 153.338132534474\cdots$
257	$X^3 - X^2 - 4X + 3$	$24R_FR_K \approx 164.288312812200\cdots$
316	$X^3 - X^2 - 4X + 2$	$24R_FR_K \approx 476.671900506020\cdots$
321	$X^3 - X^2 - 4X + 1$	$24R_FR_K \approx 373.906198803442\cdots$
469	$X^3 - X^2 - 5X + 4$	$24R_FR_K \approx 385.974675403784\cdots$
473	$X^3 - 5X - 1$	$24R_FR_K \approx 352.038810858185\cdots$
568	$X^3 - X^2 - 6X - 2$	$24R_FR_K \approx 826.323808728937\cdots$
733	$X^3 - X^2 - 7X + 8$	$24R_FR_K \approx 420.123429359158\cdots$
761	$X^3 - X^2 - 6X - 1$	$24R_FR_K \approx 624.385173601948\cdots$
892	$X^3 - X^2 - 8X + 10$	$24R_FR_K \approx 1219.47287214903\cdots$
993	$X^3 - X^2 - 6X + 3$	$24R_FR_K \approx 1143.05632028698\cdots$
1016	$X^3 - X^2 - 8X + 10$	$24R_FR_K \approx 1515.54846333741\cdots$
1101	$X^3 - X^2 - 9X + 12$	$24R_FR_K \approx 1300.42423105114\cdots$
1229	$X^3 - X^2 - 7X + 6$	$24R_FR_K \approx 702.577174538125\cdots$
1257	$X^3 - X^2 - 8X + 9$	$24R_FR_K \approx 1817.41893556155\cdots$
1304	$X^3 - 11X - 2$	$24R_FR_K \approx 1853.94787535224\cdots$
1373	$X^3 - 8X - 5$	$24R_FR_K \approx 816.743621133275\cdots$
1436	$X^3 - 11X - 12$	$24R_FR_K \approx 2005.36239366819\cdots$
1489	$X^3 - X^2 - 10X - 7$	$24R_FR_K \approx 1541.21730852376\cdots$
1509	$X^3 - X^2 - 7X + 4$	$24R_FR_K \approx 1687.45057825062\cdots$
1772	$X^3 - X^2 - 12X + 8$	$24R_FR_K \approx 2502.87047104155\cdots$
1901	$X^3 - X^2 - 9X - 4$	$24R_FR_K \approx 1555.03213827395\cdots$
1929	$X^3 - X^2 - 10X + 13$	$24R_FR_K \approx 3816.49525210154\cdots$
1957	$X^3 - X^2 - 9X + 10$	$48R_FR_K \approx 1493.04499124585\cdots$

表 1　判別式が 2000 以下かつ類数 3 の実二次体上 Hecke 指標についての Petersson 内積

References

[1] N. Bergeron, *The Spectrum of Hyperbolic Surfaces*, Universitexst.Springer,2016. Translated by Farrell Brumley. Springer,Cham, 2016.

[2] A. Borel and H. Jacquet *Automorphic Forms and Automorphic Representations*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics Vol.33, 189-202, 1979

[3] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge University Press, 1997.

[4] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Seventh Edition, Academic Press, 2007

[5] S. Gun and M. Ram Murty and p. Rath, *Transcendental nature of special values of L-functions*, Canad. J. Math. 63(1), 136-152, 2011

[6] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree 2n* Ann. of Math. (2) 154(2001), no. 3, 641-681

[7] H. Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **121** (1949), 141-183.

[8] H. Maass, *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades*, Invent. Math.(52), 1979, 95-104.

[9] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer, 2006.

[10] T. Miyazaki, On Saito-Kurokawa lifting to cohomological Siegel modular forms. (English summary) Manuscripta Math. 114 (2004), no. 2, 139–163.

[11] M. Ram Murty and V. Kumar Murty, *Transcendental values of class group L-functions*, Math. Ann. Mathematische Annalen 351(4), 835-855, 2011

[12] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1992.

[13] S. Niwa, *On Generalised Whittaker Functions on Siegel's Upper Half Spase of Degree 2* Nagoya Math. J.(121), 1991, 171-184.

[14] H. M. Stark *L-Functions at s=1. II. Artin L-functions with Rational Characters*, Advances in Mathematics 17, 60-92, 1975.

[15] H. Yoshida, *On Siegel modular forms obtained from theta series*, J. Reine Angew. Math.(352), 1984, 184-219.

[16] D. Zagier, *Modular parametrizations of elliptic curves*, Canadian Mathematical Bulletin 28 (1985), no. 3, 372–384.

[17] The Sage Developers, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.2)*, https://www.sagemath.org, 2025.

[18] The LMFDB Collaboration, *The L-functions and Modular Forms Database*, available at https://www.lmfdb.org/NumberField/, accessed November 9, 2025.